

Einführung in die Diskrete Mathematik

1. Übung

1. Für natürliche Zahlen n und m seien $K_n := (\{1, \dots, n\}, \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\})$ (der *vollständige Graph* auf n Knoten) und $K_{n,m} := (\{1, \dots, n+m\}, \{\{i, j\} : 1 \leq i \leq n < j \leq n+m\})$. Für welche natürlichen Zahlen n und m enthält K_n bzw. $K_{n,m}$

(a) einen Eulerschen Spaziergang?

(b) einen Hamiltonkreis?

(2+2 Punkte)

2. Welche ungerichteten Graphen haben eine Orientierung G , für die Bedingung (a) bzw. (b) gilt?

(a) $|\delta^+(v)| - |\delta^-(v)| \in \{-1, 0, 1\}$ für alle $v \in V(G)$;

(b) $|\delta^+(X)| - |\delta^-(X)| \in \{-1, 0, 1\}$ für alle $X \subseteq V(G)$.

Die Antworten zu (a) und (b) können natürlich verschieden ausfallen. Begründen Sie sie!
(3+3 Punkte)

3. An einem Tennisturnier nehmen genau n Spieler teil. Jeder spielt genau einmal gegen jeden anderen. Es gibt keine Unentschieden. Am Ende soll eine Rangliste der Spieler aufgestellt werden, d.h. eine Nummerierung mit $s_1, \dots, s_n$, und zwar so, dass s_i gegen s_{i+1} gewonnen hat für alle $i = 1, \dots, n-1$.

(a) Beweisen Sie, dass dies immer möglich ist.

(b) Finden Sie einen Algorithmus, der die Ergebnisliste als Eingabe bekommt und eine solche Rangliste in $O(n^k)$ Rechenschritten bestimmt, wobei k eine Konstante sei. Wie klein kann k gewählt werden?
(2+3 Punkte)

4. Schreiben Sie ein Programm, das zu einem gegebenen eulerschen zusammenhängenden gerichteten Graphen einen eulerschen Spaziergang berechnet. Das Programm soll lineare Laufzeit erreichen. Nähere Angaben zur Programmieraufgabe finden Sie auf der Rückseite. (10 Punkte)

Abgabe der Theoriaufgaben: Donnerstag, den 22.10.2026, 16:10 Uhr über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe.

Zur Programmieraufgabe:

Das Programm muss in C oder C++ geschrieben sein. Es wird empfohlen, C++ zu verwenden. In diesem Fall kann man zum Einlesen und Speichern der Graphen die Klasse `Graph` aus dem Buch “Algorithmische Mathematik” (Hougardy/Vygen) benutzen. Diese finden Sie (wie alle Programme aus diesem Buch) hier:

<http://www.or.uni-bonn.de/~hougardy/alma/alma2nd.html>

Sie können alle diese Programme und Datenstrukturen verwenden. Außerdem dürfen Sie die STL verwenden, aber keine weiteren externen Bibliotheken.

Eingabeformat: In der ersten Zeile steht eine einzelne natürliche Zahl (größer als 0 und kleiner als 2^{31}), welche die Anzahl der Knoten angibt. Wir nehmen an, dass, wenn wir n Knoten haben, die Knoten von 0 bis $n - 1$ durchnummeriert sind. Jede weitere Zeile spezifiziert genau eine Kante. Die beiden Einträge einer Zeile sind zwei verschiedene nichtnegative ganze Zahlen, welche die Nummern der Endknoten der Kante sind. Die Kante ist dabei vom ersten eingetragenen Knoten zum zweiten gerichtet. Es können parallele Kanten vorkommen. Die Sortierung der Kanten in der Eingabedatei kann beliebig sein.

Sie können voraussetzen, dass der Graph eulersch und zusammenhängend ist.

Ausgabeformat: Das Programm soll die Knotenfolge eines eulerschen Spaziergangs ausgeben, wobei in jeder Zeile der Ausgabe der Index eines Knotens stehen soll.

Beispiel: Eine Eingabedatei für einen Graphen mit 5 Knoten und 7 Kanten kann so aussehen:

```
5
3 4
2 3
0 1
1 2
2 3
4 2
3 0
```

Die Ausgabe der Programms kann dann so aussehen:

```
1
2
3
4
2
3
0
1
```

Das Programm muss korrekt arbeiten und ohne Fehlermeldung kompiliert werden können. Der Code muss auf einem gängigen Linuxsystem funktionieren.

Abgabe: Der Quelltext des Programms muss bis **1.11.2026, 23:59 Uhr** über die eCampus-Seite der eigenen Übungsgruppe abgegeben werden.

Testinstanzen finden Sie auf der eCampus-Seite der Vorlesung.