Wintersemester 2019/20
Prof. Dr. B. Korte
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Kombinatorik, Graphen, Matroide
10. Übung

1. Zeigen Sie:

   (a) $s_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} s_{n,i}$,

   (b) $S_{n+1,k+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$. (2+2 Punkte)

2. Es sei $S^o_{n,k}$ die Zahl der Möglichkeiten, die Menge $\{1, \dots, n\}$ so in k Teilmengen zu zerlegen, dass jede dieser Teilmengen ungerade Größe hat. Finden Sie eine rekursive Formel, mit der sich $S^o_{n+1,k+1}$ aus den Werten $S^o_{n',k'}$ mit $n' \leq n$ und $k' \leq k$ berechnen lässt. (2 Punkte)

3. Gegeben sei eine Permutation $a_1 a_2 \dots a_n$ von $\{1, \dots, n\}$. Eine *Inversion* ist ein Paar a_i, a_j mit $i < j$ aber $a_i > a_j$. Zum Beispiel hat 1 4 3 5 2 die Inversionen 4,3; 4,2: 3,2; 5,2. Es sei $I_{n,k}$ die Zahl der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:

   (a) $I_{n,0} = 1$.

   (b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0, \dots, \binom{n}{2}$.

   (c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?

   (d) $\sum_{k=0}^{\binom{n}{2}} (-1)^k I_{n,k} = 0$ für $n \geq 2$. (1+1+2+2 Punkte)

4. Sei $p_n(0) := 1$ und $p_n(k) := |\{(i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k \mid i_j + 1 < i_{j+1} \text{ für } j = 1, \dots, k-1\}|$ für $k > 0$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{n} p_n(k) = F_{n+2}$ gilt (wobei F_n die n-te Fibonacci-Zahl bezeichne). (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 19.12.2019, vor der Vorlesung.