Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
12. Übung

1. Sei $k \geq 2$ eine Konstante. Beweisen Sie, dass es *NP*-vollständig ist zu entscheiden, ob ein gegebener ungerichteter Graph G einen aufspannenden Baum T enthält, in dem kein Knotengrad größer als k ist. (4 Punkte)

2. Man zeige, dass es *NP*-schwer ist zu entscheiden, ob eine gegebene SATISFIABILITY-Instanz von der Mehrzahl aller Wahrheitsbelegungen der verwendeten Variablen erfüllt wird. (4 Punkte)

3. Zeigen Sie, dass das folgende Problem *NP*-schwer ist:
Gegeben seien ganze Zahlen $c_1, \ldots, c_n, K, L$. Gibt es K paarweise verschiedene Teilmengen $S_1, \ldots, S_K \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $\sum_{j \in S_i} c_j \geq L$ für $i = 1, \ldots, K$? (6 Punkte)

4. Die Menge der *booleschen Formeln* zu einer Variablenmenge X sei wie folgt definiert: „true“ und „false“ sind boolesche Formeln der Länge 0. „x“ und „$\bar{x}$“ (für $x \in X$) sind boolesche Formeln der Länge 1. Sind ϕ und ϕ' boolesche Formeln der Längen k bzw. k', dann sind „$(\phi \wedge \phi')$“ und „$(\phi \vee \phi')$“ boolesche Formeln der Länge $k + k'$. Weitere boolesche Formeln gibt es nicht.
Betrachten Sie nun folgendes Problem: Zu einer gegebenen booleschen Formel soll eine äquivalente boolesche Formel minimaler Länge gefunden werden. Dabei heißen zwei boolesche Formeln *äquivalent*, wenn Sie bei natürlicher Auswertung für jede Wahrheitsbelegung der Variablen dasselbe Ergebnis liefern. Zeigen Sie, dass es genau dann einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem gibt, wenn $P = NP$ gilt. (6 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 24.1.2019, **vor** der Vorlesung.