Wintersemester 2018/19 Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Prof. Dr. S. Held Universität Bonn
Dr. U. Brenner

Einführung in die Diskrete Mathematik
11. Übung

1. Beweisen Sie, dass folgende Entscheidungsprobleme in *NP* sind:

   (a) Gegeben seien ein zusammenhängender ungerichteter Graph G, Kantengewichte $c : E(G) \to \mathbb{Z}_+$ und eine natürliche Zahl k. Gibt es einen aufspannenden Subgraphen H von G mit $|E(H)| \leq k$ und Gewichte $c' : E(H) \to \mathbb{R}_+$, so dass

   $$\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t) \leq \operatorname{dist}_{(H,c')}(s,t) \leq \sqrt{2} \operatorname{dist}_{(G,c)}(s,t)$$

   für alle $s, t \in V(G)$ gilt?

   (b) Gegeben seien eine natürliche Zahl n und natürliche Zahlen a_i, b_i für $i = 1, \ldots, n$. Kann man n Quadrate mit Kantenlängen $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$ achsenparallel in das Einheitsquadrat packen? Die Quadrate dürfen sich dabei berühren, aber nicht überlappen. (3+3 Punkte)

2. (a) Zeigen Sie, dass 2SAT, also die Einschränkung des Satisfiability-Problems auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens zwei Literale hat, in polynomieller Zeit lösbar ist.

   (b) Man beschreibe einen Algorithmus mit linearer Laufzeit, der für jede Satisfiability-Instanz eine Wahrheitsbelegung bestimmt, die mindestens die Hälfte aller Klauseln erfüllt. (4+2 Punkte)

3. Betrachten Sie 3-Occurrence-Sat, d.h. Satisfiability eingeschränkt auf Instanzen, in denen jede Klausel höchstens drei Literale enthält und jede Variable in höchstens drei Klauseln vorkommt. Man beweise, dass dieses Problem *NP*-vollständig ist. (4 Punkte)

4. Das Clique-Problem (also das Problem, zu entscheiden, ob ein gegebener Graph G eine Clique der Größe k enthält) ist leicht in polynomieller Zeit lösbar, wenn k konstant ist (warum?). Zeigen Sie, dass es aber *NP*-vollständig bleibt, wenn man es auf k mit $k = O(n^{\frac{1}{t}})$ ein konstantes t einschränkt. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 17.1.2019, **vor** der Vorlesung.