Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

# Einführung in die Diskrete Mathematik
## 9. Übung

1. Es sei $G$ ein minimal $k$-kantenzusammenhängender ungerichteter Graph (d.h. $G$ ist $k$-kantenzusammenhängend, aber die Herausnahme einer jeden beliebigen Kante zerstört diese Eigenschaft). Zeigen Sie, dass dann $|E(G)| \leq k(|V(G)| - 1)$ gilt. (6 Punkte)
   Hinweis: Betrachten Sie eine Familie von Mengen, die für jede Kante $e \in E(G)$ eine geeignete Menge $S_e \subseteq V(G)$ mit $|\delta(S_e)| = k$ und $e \in \delta(S_e)$ enthält. Wenn diese Familie zwei Mengen $A$ und $B$ enthält, für die $A \cap B \neq \emptyset$, $A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A$ gelten, ersetze man $A$ und $B$ durch $A \cap B$ und $A \cup B$.
   Sie erhalten für diese Aufgabe 4 Punkte, wenn Sie wenigstens eine Schranke von $|E(G)| \leq 2k(|V(G)| - 1)$ nachweisen.

2. Betrachten Sie das folgende Problem: Gegeben sei ein stark zusammenhängender gerichteter Graph $G$ mit nichtnegativen reellen Kantengewichten $c$. Gesucht ist eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass der Graph, der $f(e)$ Kopien von jedem $e \in E(G)$ und $V(G)$ als Knotenmenge enthält, Eulersch ist. Dabei soll $\sum_{e \in E(G)} c(e)f(e)$ minimiert werden. Man gebe einen polynomiellen Algorithmus für dieses Problem an. (5 Punkte)

3. In Abbildung 1 sehen Sie einen stark vereinfachten Plan der Skipisten in Zermatt. Die Pisten selbst sind in rot dargestellt, Skilifte und andere Transportmöglichkeiten in schwarz. Was ist die kürzeste Zeit, in der man, wenn man in Zermatt beginnt und endet, alle Skipisten abfahren kann? Zeigen Sie (auf möglichst einfache Weise), dass Ihre Lösung tatsächlich optimal ist. (4 Punkte)

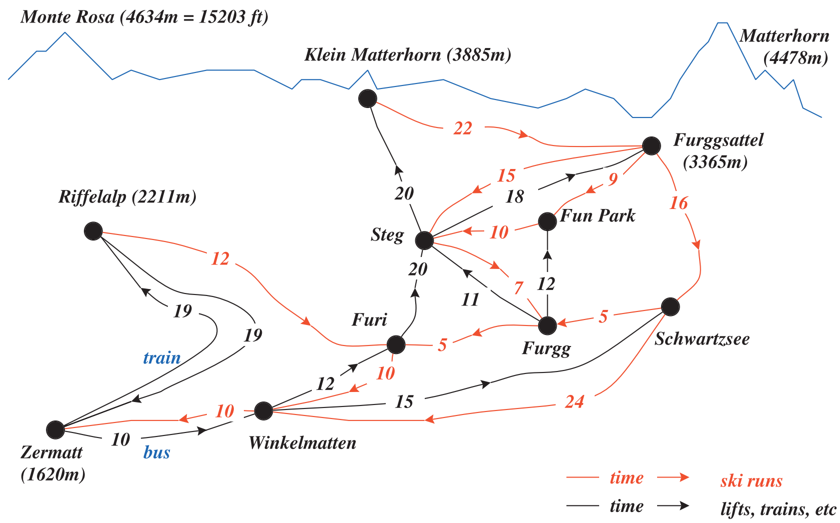


Abbildung 1: Skipisten in Zermatt.

4. Eine Firma schätzt, dass sie in Kalenderwoche $i$ bis zu $p_i$ Autos produzieren kann und bis zu $v_i$ Autos verkaufen kann ($i = 1, \ldots, 52$). Produzierte Autos stehen ab Beginn der folgenden Kalenderwoche zum Verkauf bereit. Ein in Woche $i$ produziertes und in Woche $j > i$ verkauftes Auto belegt in den Wochen $i+1, \ldots, j$ Lagerraum. Die Firma kann immer nur höchstens $l$ Autos lagern. In der ersten Kalenderwoche wird nicht produziert, d.h. $p_1 = 0$, es stehen aber aus der Vorjahresproduktion noch $p_0$ produzierte Autos im Lager.

   (a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Die Firma möchte feststellen, wieviele Autos sie bis zur $k$-ten Kalenderwoche maximal verkaufen kann.

   (b) Außerdem möchte sie wissen, ob sich diese Zahl verringert, wenn sie die Produktion auch in der zweiten Kalenderwoche ruhen lässt.

   (c) Bei Produktionskosten von $P$ und Verkaufserlösen von $V$ je Auto, sowie Lagerkosten von $L$ je Auto und Woche stellt sich die Frage, wann wieviele Autos produziert werden sollen, um den Gewinn zu maximieren. Ignorieren Sie dabei Zinseffekte.

   Können Sie der Firma helfen? (2+1+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 20.12.2018, **vor** der Vorlesung.