Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
6. Übung

1. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben sei ein gerichteter azyklischer Graph G mit Kantengewichten, und gesucht ist eine maximal gewichtete Menge $C \subseteq E(G)$, so dass es keinen gerichteten Weg in G gibt, der zwei Kanten aus C enthält. Geben Sie ein effizienten Algorithmus für dieses Problem an. (6 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie einen Max-Flow-Algorithmus.

2. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk. Man nenne einen s-t-Präfluss f in (G, u) maximal, wenn $\mathrm{ex}_f(t)$ maximal ist.

   (a) Man zeige, dass es für jeden maximalen s-t-Präfluss f einen maximalen s-t-Fluss f' mit $f'(e) \leq f(e)$ für alle $e \in E(G)$ gibt.

   (b) Man zeige, wie man in $O(nm)$ Zeit einen maximalen s-t-Präfluss in einen maximalen s-t-Fluss umwandeln kann. (2+2 Punkte)

3. Beweisen Sie, dass der Push-Relabel-Algorithmus $O(n^2m)$ nichtsaturierende Pushs durchführt, unabhängig von der Wahl des aktiven Knotens v in der Schleife des Algorithmus. (5 Punkte)
Hinweis: Betrachten Sie $\Phi := \sum_{v \text{ aktiv}} \psi(v)$.

4. Das gebrochene b-Matching-Problem wird folgendermaßen definiert: Gegeben seien ein ungerichteter Graph G, Kapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_+$, Zahlen $b : V(G) \to \mathbb{R}_+$ und Gewichte $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Man finde eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_+$ mit $f(e) \leq u(e)$ für alle $e \in E(G)$ und $\sum_{e \in \delta(v)} f(e) \leq b(v)$ für alle $v \in V(G)$, die $\sum_{e \in E(G)} c(e)f(e)$ maximiert.

   (a) Man zeige, wie man dieses Problem durch Zurückführung auf ein Minimum-Cost-Flow-Problem lösen kann.

   (b) Man zeige, dass, wenn b und u ganzzahlig sind, stets eine halb-ganzzahlige Lösung f existiert (d.h. $2f(e)$ muss für alle $e \in E(G)$ ganzzahlig sein). (3+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 29.11.2018, **vor** der Vorlesung.