Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
5. Übung

1. Die Zeitsteuerungsbedingungen („timing constraints") eines Logikchips lassen sich durch einen gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ darstellen. Dabei entsprechen die Knoten den Speicherelementen und die Kanten gewissen durch die kombinatorische Logik definierten Wegen, während die Gewichte (Schätzungen der) Signallaufzeiten entsprechen. Eine Teilaufgabe des Chip-Designs ist es, einen optimalen Takt-Zeitplan zu finden, d.h. eine möglichst kleine Zahl T und eine Abbildung $a : V(G) \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a(v) + c((v, w)) \leq a(w) + T$ für alle $(v, w) \in E(G)$. Hierbei ist T die Zykluszeit des Chips, und $a(v)$ bzw. $a(v) + T$ sind die Startzeit bzw. die späteste zulässige Ankunftszeit des Signals in v.

   a) Reduzieren Sie das Problem, das optimale T zu finden, auf das MINIMUM-MEAN-CYCLE-PROBLEM.
   b) Zeigen Sie, wie man die Zahlen $a(v)$ einer optimalen Lösung effizient bestimmen kann.
   c) Typischerweise sind einige der Zahlen $a(v)$ vorab festgelegt. Man zeige, wie man in diesem Fall das Problem lösen kann. (2+2+2 Punkte)

2. Sei G ein gerichteter oder ungerichteter Graph. Wir bezeichnen für zwei Knoten $s, t \in V(G)$ mit λ_{st} die maximale Anzahl paarweise kantendisjunkter s-t-Wege in G. Seien nun $x, y, z \in V(G)$ drei verschiedene Knoten und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \leq \lambda_{xy}$, $\beta \leq \lambda_{xz}$ und $\alpha + \beta \leq \max\{\lambda_{xy}, \lambda_{xz}\}$. Zeigen Sie, dass es dann α x-y-Wege und β x-z-Wege gibt, so dass diese $\alpha + \beta$ Wege paarweise kantendisjunkt sind. (5 Punkte)

3. Sei (G, u, s, t) ein Netzwerk. Der Wert v eines maximalen s-t-Flusses in (G, u) sei positiv. Betrachten Sie folgende Aussagen für eine Kante $e \in E(G)$ mit $u(e) > 0$:

   (a) Jede Verringerung von $u(e)$ bewirkt eine Verringerung von v.
   (b) Jede Vergrößerung von $u(e)$ bewirkt eine Vergrößerung von v.
   (c) Das Löschen von e verringert v mindestens so stark wie das Löschen jeder anderen Kante.
   (d) e gehört zu einem minimalen s-t-Schnitt.
   (e) e wird von jedem maximalen s-t-Fluss f saturiert (d.h. $f(e) = u(e)$).

   Welche dieser Aussagen sind äquivalent zueinander? Gilt bei nicht äquivalenten Paaren von Aussagen wenigstens eine der beiden Implikationen? (5 Punkte)

4. Eine Fluglinie will p Flüge auf unterschiedlichen Strecken mit möglichst wenigen Flugzeugen durchführen. Alle verwendeten Flugzeuge sollen dabei vom selben vorgegebenen Typ sein. Für jeden Flug sei der Abflugzeitpunkt a_i festgelegt und seine Flugdauer t_i bekannt ($i = 1, \ldots, p$). Ein Flugzeug benötigt r_{ij} Stunden, um nach der Landung am Zielpunkt von Flug i den Startpunkt von Flug j zu erreichen und dort einsatzbereit zu sein ($i, j = 1, \ldots, p$). Wie kann man effizient eine optimale Lösung für dieses Problem finden? (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 22.11.2018, **vor** der Vorlesung.