Wintersemester 2018/19
Prof. Dr. S. Held
Dr. U. Brenner

Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
4. Übung

1. (a) Zeigen Sie, dass es Folgen von Heap-Operationen gibt, so dass in einem Fibonacci-Heap die maximale Pfadlänge in einer Arboreszenz $\Theta(n)$ ist, wenn n die Zahl der Elemente ist.

   (b) Zeigen Sie, dass zwei Fibonacci-Heaps mit n_1 und n_2 Elementen in $O(\log(n_1 + n_2))$ Zeit verschmolzen werden können. Das Ergebnis soll also ein Fibonacci-Heap sein, der alle $n_1 + n_2$ Elemente enthält. (2+2 Punkte)

2. (a) Zeigen Sie, wie man in einem gegebenen gerichteten Graphen ein Branching mit maximaler Kardinalität in linearer Laufzeit finden kann.

   (b) Berechnen Sie in dem Graphen, der in Abbildung 1 dargestellt ist, mit Hilfe des Algorithmus von Edmonds ein gewichtsmaximales Branching. Geben Sie auch die Graphen an (mit den zugehörigen Kantengewichten), die während des Algorithmus durch Kontraktion entstehen. (3+2 Punkte)

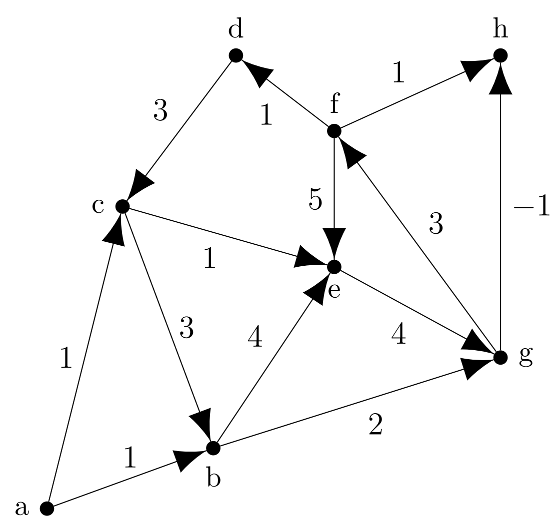

Abbildung 1: Instanz zur Berechnung eines maximal gewichteten Branchings.

3. Zeigen Sie, dass Edmonds' Branching-Algorithmus zur Berechnung eines maximal gewichteten Branchings in einem gerichteten Graphen G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_+$ so implementiert werden kann, dass er Laufzeit $O(m+n \log n)$ hat. Dabei sei $n = |V(G)|$ und $m = |E(G)|$ (6 Punkte)
   Hinweis: Verwenden Sie Fibonacci-Heaps.

4. Betrachten Sie folgenden Algorithmus, um in einem gegebenen Digraphen G mit Gewichten $l : E(G) \to \mathbb{R}_+$ zu einem Knoten $r \in V(G)$, von dem aus jeder Knoten in G erreichbar ist, eine aufspannende r-Arboreszenz T mit minimalem Gewicht $\sum_{e \in E(T)} l(e)$ zu bestimmen: Es sei $G_0 := (V(G), \{e \in E(G) \mid l(e) = 0\})$. Wenn G_0 eine aufspannende r-Arboreszenz enthält, gibt man eine solche zurück. Andernfalls wählt man eine starke Zusammenhangskomponente K von G_0 mit $r \notin V(K)$ und $l(e) > 0$ für alle $e \in \delta_G^-(V(K))$. Überlegen Sie sich, warum eine solche existiert. Es sei $\alpha := \min\{l(e) \mid e \in \delta_G^-(V(K))\}$. Setze nun $l'(e) := l(e) - \alpha$ für $e \in \delta_G^-(V(K))$ und $l'(e) := l(e)$ für $e \in E(G) \setminus \delta_G^-(V(K))$. Dann berechnet man rekursiv eine kostenminimale aufspannende r-Arboreszenz T bezüglich l'. Zeigen Sie, dass T so gewählt werden kann, dass $|\delta_T^-(V(K))| = 1$ gilt. Diese Arboreszenz T gibt man dann zurück.

   Beweisen Sie, dass dieser Algorithmus korrekt funktioniert. (5 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 15.11.2018, **vor** der Vorlesung.

Eine Mitteilung der Fachschaft Mathematik: Am 15.11.2018 findet um 19 Uhr (s.t.) im Lipschitzsaal ein Studentinnentreffen (erstes und drittes Fachsemester) statt. Wir möchten mit euch über eure bisherigen Erfahrungen im Mathematikstudium und eure Gründe nach Bonn zu kommen reden. Für ein zahlreiches Erscheinen wären wir sehr dankbar! Für mehr Informationen sendet einfach eine E-Mail an `gleichstellung@fsmath.uni-bonn.de`