Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Einführung in die Diskrete Mathematik
3. Übung

1. Betrachten Sie die folgende Version einer Union-Find-Struktur: An jedem Repräsentanten einer Menge wird die Größe der repräsentierten Menge gespeichert. Wenn zwei Mengen vereinigt werden, sucht man erst die beiden Repräsentanten x und y der Mengen. Ohne Einschränkung repräsentiere x die größere der beiden Mengen (den Fall gleichgroßer Knotenmengen kann man beliebig behandeln). Dann wird x Repräsentant der vereinigten Menge, indem x der PARENT von y wird. Die Funktion FIND wird wie in der Vorlesung in UNION-BY-BRANCHING realisiert. Zeigen Sie, dass ein Aufruf von FIND(z) für jedes Element z höchstens Laufzeit $O(\log n)$ hat, wobei n die Zahl aller Elemente sei. (4 Punkte)

2. Betrachten Sie folgendes Problem: Gegeben seien ein ungerichteter zusammenhängender Graph G mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, ein Knoten $v_0 \in V(G)$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq |\delta_G(v_0)|$. Gesucht ist ein aufspannender Baum von T in G, so dass v_0 in T mindestens Grad k hat, der unter allen aufspannenden Bäumen in G, in denen v_0 mindestens Grad k hat, minimales Gewicht hat. Geben Sie einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit an, der dieses Problem löst. (5 Punkte)

3. Sei G ein zusammenhängender ungerichteter Graph mit Kantengewichten $c : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dabei seien alle Kantengewichte verschieden, also $c(e) \neq c(e')$ für $e \neq e'$.

   (a) Zeigen Sie, dass es dann genau einen kostenminimalen Spannbaum T in G gibt.

   (b) Ein zweitbester Spannbaum sei ein Spannbaum, der von T verschieden ist und unter allen von T verschiedenen Spannbäumen kleinste Kosten hat. Zeigen Sie, dass es mehrere zweitbeste Spannbäume geben kann.

   (c) Geben Sie einen möglichst effizienten Algorithmus zur Berechnung eines zweitbesten Spannbaums zu einem gegebenen Spannbaum T an. Zeigen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens. (2+2+2 Punkte)

4. Es sei G ein ungerichteter Graph und $c : E(G) \to \mathbb{R}$. Eine Kante $e \in E(G)$ heiße *gefährlich*, wenn sie eine längste Kante auf einem Kreis in G ist. Sie heiße *nützlich*, wenn sie in keinem Kreis von G enthalten ist.

   (a) Zeigen Sie, dass jeder minimale Spannbaum von G jede nützliche Kante enthält.

   (b) Zeigen Sie, dass es für jede gefährliche Kante e einen minimalen Spannbaum von G gibt, der e nicht enthält.

   (c) Beschreiben und analysieren Sie eine effiziente Implementierung eines "umgekehrten Kruskal-Algorithmus" zur Berechnung eines minimalen Spannbaums: Durchlaufe die Kanten von G absteigend nach Gewicht sortiert. Wenn die betrachtete Kante gefährlich ist, entferne man sie. (1+1+3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, den 8.11.2018, **vor** der Vorlesung.