Lineare und ganzzahlige Optimierung
Übungen zur Vorbereitung

1. Eine Firma produziert und verkauft zwei verschiedene Produkte. Unser Ziel ist es, die Anzahl der Einheiten jedes Produkts zu bestimmen, die während eines Monats hergestellt werden sollen, unter der Annahme, dass es eine unbegrenzte Nachfrage nach den Produkten gibt, es aber einige Einschränkungen hinsichtlich der Produktionskapazität und des Budgets gibt.

   Es gibt 20000 Stunden Maschinenzeit im Monat. Die Herstellung einer Einheit erfordert 3 Stunden Maschinenzeit für das erste Produkt und 4 Stunden für die zweites Produkt. Die Material- und sonstigen Kosten für die Herstellung einer Einheit des ersten Produkts belaufen sich auf 3 GE (Geldeinheiten), während die Herstellung einer Einheit des zweiten Produkts 2 GE kostet. Die Produkte werden für 6 GE bzw. 5 GE pro Einheit verkauft. Das verfügbare Budget für die Produktion beträgt anfänglich 4000 GE. 25% der Einnahmen aus dem Verkauf des ersten Produkts können sofort als zusätzliches Budget für die Produktion verwendet werden, und so auch 28% der Einnahmen aus dem Verkauf des zweiten Produkts.

   (a) Geben Sie ein lineares Programm an, das unter diesen Nebenbedingungen den Gewinn maximiert.

   (b) Lösen Sie das lineare Programm graphisch, indem Sie die Menge der zulässigen Lösungen zeichnen und der Zeichnung eine Optimallösung entnehmen.

2. Geben Sie jeweils notwendige und hinreichende Kriterien für die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ an, sodass das lineare Programm $\max\{x + y \mid \alpha x + \beta y \leq \gamma, x \geq 0, y \geq 0\}$

   (a) eine optimale Lösung hat,

   (b) zulässig ist,

   (c) unberschränkt ist.

b.w.

3. Bringen Sie die folgenden linearen Programme jeweils in Standard-Gleichungsform und in Standard-Ungleichungsform:

   (a)

$$\begin{array}{lrcl} \min & -2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ & x_1 - x_2 & \geq & 1 \\ & x_1 & \geq & 0 \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{lrcl} \max & 3x_1 + 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ & 4x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & 4x_1 - x_3 & = & 37 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 4 \end{array}$$

4. Es seien zwei endliche disjunkte Mengen A und B von Punkten in der Ebene gegeben. Wir suchen eine quadratische Funktion $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, so dass alle Punkte in A unter der Kurve $\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$ und alle Punkte in B über diese Kurve liegen (insbesondere soll kein Punkt auf der Kurve liegen). Geben Sie ein lineares Programm an, mit dessen Lösung Sie direkt die Existenz eines solchen Polynoms überprüfen können und, falls es existiert, ein solches Polynom angeben können.

Diese Aufgaben werden nicht abgegeben und bewertet, sondern dienen nur der eigenen Einübung des Vorlesungsstoffs, der für die ersten beiden Semesterwochen vorgesehen ist. Lösungen werden nach dem 24.4. bekanntgegeben.