Lineare und Ganzzahlige Optimierung
12. Übung

1. Es sei $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^n$ ein Vektor und β eine rationale Zahl. Zeigen Sie, dass $a^t x \leq \beta$ genau dann TDI ist, wenn der größte gemeinsame Teiler von $a_1, \dots, a_n$ gleich 1 ist.

2. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Wenn $Ax \leq b$ (mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$) ein TDI-System ist und $\alpha \in \mathbb{Q}_{>0}$, dann ist $\alpha Ax \leq \alpha b$ ein TDI-System.

3. Es sei $C \neq \emptyset$ ein rationaler spitzer polyedrischer Kegel. Zeigen Sie, dass es dann eine eindeutig bestimmte inklusionsminimale ganzzahlige Hilbert-Basis gibt, die C erzeugt.
   Hinweis: Betrachten Sie die ganzzahligen Vektoren C, die nicht als Summe von zwei ganzzahligen Vektoren in C geschrieben werden können.

4. Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ nicht vollständig unimodular ist, aber $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = b\}$ für alle ganzzahligen Vektoren b ganzzahlig ist.

5. Es sei $A \in \{0,1\}^{m \times n}$, sodass die Einsen in jeder Spalte direkt untereinander stehen, d.h. für jede Spalte $j \in \{1, \dots, n\}$ gibt es $i_1^j, i_2^j \in \{1, \dots, m\}$ mit:
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i_1^j \leq i \leq i_2^j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$
   für $j \in \{1, \dots, n\}$ und $i \in \{1, \dots, m\}$ (falls $i_1^j > i_2^j$, dann besteht die Spalte nur aus Nullen). Zeigen Sie, dass A vollständig unimodular ist.

Die Aufgaben auf diesem Zettel dienen nur der eigenen Übung. Sie werden nicht korrigiert und spielen keine Rolle für die Zulassung zur Prüfung.