Lineare und Ganzzahlige Optimierung
10. Übung

1. Betrachten Sie das folgende Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{rl} \min & \frac{c^t x + d}{f^t x + g} \\ \text{s.t.} & Ax \le b \\ & \|x\|_\infty \le R \end{array}$$

mit $c, f \in \mathbb{Q}^n$, $d, g, R \in \mathbb{Q}$, $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$. Sie können annehmen, dass $f^t x + g > 0$ und $c^t x + d > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\|_\infty \le R$ gilt und dass es eine zulässige Lösung gibt. Zeigen Sie, dass es für jedes $\epsilon > 0$ einen Polynomzeit-Algorithmus gibt, der eine zulässige Lösung x^* mit $\frac{c^t x^* + d}{f^t x^* + g} \le \mathrm{OPT}(1+\epsilon)$ berechnet, wobei OPT der Wert einer Optimallösung sei. (5 Punkte)

2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $rB^n \subseteq K \subseteq RB^n$ (für Zahlen $0 < r < R$), $c \in \mathbb{R}^n$, $\delta = \sup\{c^t x \mid x \in K\}$ und $0 < \epsilon < \delta$. Außerdem sei $U = \{x \in K \mid c^t x \ge \delta - \epsilon\}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{volume}\,(U) \ge \left(\frac{\epsilon}{2\|c\|R|}\right)^{n-1} r^{n-1} \frac{1}{n^n} \frac{\epsilon}{2\|c\|} \frac{1}{n}.$$

(5 Punkte)

3. Sei wieder $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $rB^n \subseteq K \subseteq RB^n$ für Zahlen $0 < r \le \frac{R}{2}$. Nehmen Sie an, dass ein Polynomzeit-Orakel gegeben ist, das zu jeder linearen Zielfunktion eine optimale Lösung in K berechnet. Zeigen Sie, dass es dann ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für $K^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \le 1 \text{ für alle } x \in K\}$ gibt. (4 Punkte)

4. Geben Sie ein Beispiel an für ein zulässiges und beschränktes ganzzahliges lineares Programm, das keine Optimallösung hat. (2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 2. Juli, 2020, vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).