Sommersemester 2020 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner | Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
9. Übung

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ s & -1 \end{pmatrix}$ und $b := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Benutzen Sie den Idealisierten Ellipsoid-Algorithmus mit $R = 2$, um einen Vektor in $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Ax \leq b\}$ für $s = -1$ bzw. $s = -2$ zu berechnen. (3 Punkte)

2. Wir definieren $\|A\| := \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die gewöhnliche Euklidische Norm ist. Zeigen Sie:

   (a) $\|A\|$ ist eine Norm.

   (b) $\|aa^T\| = a^T a$

   (c) $\|A\| = \max\{x^T Ax \mid \|x\| = 1\}$ falls A positiv semidefinit ist

   (d) $\|A\| \leq \|A + B\|$ falls A und B positiv semidefinit sind. (1+2+2+1 Punkte)

3. Zeigen Sie $|\det(A)| \leq \prod_{i=1}^n \|a_i\|$ für eine $n \times n$-Matrix A mit Spalten $a_1, \dots, a_n$ (wobei $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wieder die gewöhnliche Euklidische Norm ist). (3 Punkte)

4. Es sei G ein einfacher gerichteter Graph. Betrachten Sie das folgende lineare Programm:

$$
\begin{array}{llcll}
\min & \sum\limits_{e=\{v,w\}\in E(G)} x_{vw} & & & \\
\text{s.d.} & \sum\limits_{w\in S} x_{vw} & \geq & \lceil \frac{1}{4}|S|^2 + \frac{1}{2}|S| \rceil & \text{für } v \in V(G), S \subseteq V(G) \setminus \{v\} \\
 & x_{uw} & \leq & x_{uv} + x_{vw} & \text{für } u, v, w \in V(G) \\
 & x_{vw} & \geq & 0 & \text{für } v \in V(G) \\
 & x_{vv} & = & 0 & \text{für } v \in V(G)
\end{array}
$$

   (a) Zeigen Sie, dass dies eine Relaxierung des folgenden Problems ist: Finde Abstände x_{vw} für die Knoten von G, so dass $\sum\limits_{e=\{v,w\}\in E(G)} x_{vw}$ minimiert wird, unter der Nebenbedingung dass es eine Sortierung $\{v_1, \dots, v_{|V(G)|}\} = V(G)$ der Knoten gibt mit $x_{v_i v_j} = |i - j|$ für $i, j \in \{1, \dots, |V(G)|\}$.

   (b) Zeigen Sie, dass es ein Separationsorakel mit polynomieller Laufzeit für den Lösungsraum dieses LPs gibt. (2+2 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 25. Juni, 2020, vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).