Sommersemester 2020 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner | Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
7. Übung

1. Betrachten Sie das LP $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(A) = m$ und $Ax = b$ zulässig. Sei B eine dual zulässige Basis, also eine Basis, sodass $\tilde{y} = (A_B^t)^{-1} c_B$ eine zulässige Lösung des dualen LPs ist.

   (a) Zeigen Sie, dass der Eintrag z_0 im Simplex-Tableu $T(B)$ die Kosten der dualen Lösung angibt.

   (b) Sei $\beta \in B$ mit $p_\beta < 0$ und $\alpha \in N$ mit $q_{\beta\alpha} > 0$, sodass $\frac{r_\alpha}{q_{\beta\alpha}} \geq \frac{r_j}{q_{\beta j}}$ für alle $j \in N$ mit $q_{\beta j} > 0$. Zeigen Sie, dass $(B \setminus \{\beta\}) \cup \{\alpha\}$ eine dual zulässige Basis ist. Zeigen Sie außerdem, dass der Wert der dualen Lösung sich dadurch um $\frac{-p_\beta}{q_{\beta\alpha}} r_\alpha$ ändert. (1+3 Punkte)

2. Sei (G, u, b, c) eine Instanz des Minimum-Cost Flow Problem.

   (a) Dualisieren Sie die LP-Formulierung des Minimum-Cost Flow Problem aus der Vorlesung.

   (b) Es sei (r, T, L, U) eine zulässige Baumstruktur für (G, u, b, c), und es sei f der dazu gehörende Fluss und π das dazu gehörende Potential. Zeigen Sie mit Hilfe des komplementären Schlupfs, dass f optimal ist, wenn $c_\pi(e) \geq 0$ für alle $e \in L$ und $c_\pi(e) \leq 0$ für alle $e \in U$. (2+3 Punkte)

3. Beschreiben Sie einen Algorithmus für das folgende Problem: Gegeben ist ein Baum T, und man hat $O(|V(T)|)$ Zeit für eine Präprozessierung. Danach soll man in der Lage sein, zu zwei gegebenen Knoten x und y von T in Zeit $O(\operatorname{dist}_T(x, y))$ den x-y-Weg in T zu bestimmen. (3 Punkte)

   Bemerkung: Dieses Problem muss während des Netzwerk-Simplex-Algorithmus gelöst werden, wenn man einen Fundamentalkreis berechnet.

Abgabe: **Dienstag, 9. Juni, 2020,** vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).