Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
6. Übung

1. Verwenden Sie den SIMPLEX-ALGORITHMUS, um die folgenden linearen Programme zu lösen:

   (a)

$$\begin{array}{lrcl} & \max 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - x_2 & \leq & 4 \\ & -x_1 + x_2 & \leq & 1 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   (b)

$$\begin{array}{lrcl} & \max 5x_1 + 3x_2 & & \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 2x_2 & \leq & 12 \\ & 4x_1 + x_2 & \leq & 10 \\ & x_1 + x_2 & \leq & 4 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   (c)

$$\begin{array}{lrcl} & \min 5x_1 - x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 - 3x_2 & \leq & 1 \\ & x_1 - 4x_2 & \leq & 3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   (d)

$$\begin{array}{lrcl} \min & -x_1 - 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ & -x_1 - x_2 & \geq & -3 \\ & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

   Notieren Sie alle zwischenzeitlich auftretenden Simplex-Tableaus, und beschreiben Sie, warum Sie eine bestimmte Variable auswählen können, welche die Basis betritt bzw. verlässt. Wenn es eine Optimallösung gibt, geben Sie auch den Wert einer solchen an. (2+2+2+2 Punkte)

b.w.

2. Betrachten Sie ein LP in geeigneter Form für das Simplex-Verfahren, also $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, so dass A vollen Zeilenrang hat und $Ax = b$ lösbar ist. Beweisen oder widerlegen Sie:

   (a) Eine Variable, die beim Simplex gerade in die Basis gekommen ist, kann die Basis in der nächsten Iteration wieder verlassen.

   (b) Eine Variable, die beim Simplex gerade die Basis verlassen hat, kann in der nächsten Iteration wieder in die Basis kommen.

   (c) Ist x eine eindeutige optimale Basislösung und $\tilde{x}$ eine zweitbeste Basislösung mit echt kleineren Kosten, so erhalt man x aus $\tilde{x}$ durch Austausch einer Basisvariablen.

   (d) Falls keine Basislösung degeneriert ist und das LP beschränkt ist, so ist eine optimale Lösung eindeutig. (1+1+1+1 Punkte)

3. Betrachten Sie ein lineares Programm $\max\{c^t x \mid Ax = b, x \geq 0\}$. Es sei B eine zulässige Basis mit Basislösung x^* und reduzierten-Kosten-Vektor $r \leq 0$ (also ist x^* eine Optimallösung). Sei $I = \{j \in N \mid r_j = 0\}$.

   (a) Beweisen Sie, dass x^* die einzige Optimallösung ist, falls $I = \emptyset$.

   (b) Nehmen Sie an, dass $I \neq \emptyset$. Beweisen Sie, dass in dem Fall x^* genau dann die einzige Optimallösung ist, wenn das folgende lineare Programm eine Optimallösung mit Wert 0 hat:

$$\begin{array}{lrcll} \max & \sum\limits_{i \in I} x_i & & & \\ \text{s.t.} & Ax & = & b & \\ & x_i & = & 0 & \text{für } i \in N \setminus I \\ & x_i & \geq & 0 & \text{for } i \in B \cup I \end{array}$$

(4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 4. Juni, 2020, vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).