Lineare und Ganzzahlige Optimierung
5. Übung

1. Es sei $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ ein Polyeder. Außerdem sei $P^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 1$ für alle $x \in P\}$ und $P^0 := \{y \in \mathbb{R}^n \mid y^t x \leq 0$ für alle $x \in P\}$.
   (a) Zeigen Sie, dass P^* ein Polyeder ist.
   (b) Beweisen Sie, dass $(P^*)^* = P$ genau dann gilt, wenn $b \geq 0$.
   (c) Es sei außerdem $b = 0$. Zeigen Sie, dass dann $P^* = P^0$ gilt und dass P^0 der von den Zeilen von A erzeugte Kegel ist.

(2+3+2 Punkte)

2. Betrachten Sie das lineare Programm (P)

$$\begin{array}{lrcl} \max c^t x & & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

Es sei $\tilde{x}$ eine Optimallösung von (P), für die es ein Teilsystem $A'x \leq b'$ mit $A'\tilde{x} = b'$ gibt, wobei A' aus n linear unabhängigen Zeilen von A bestehe. Außerdem nehmen wir an, dass $\tilde{x}$ eine nicht-degenerierte Basislösung von $A'x = b'$ ist und dass für alle Nebenbedingungen $a^t x \leq \beta$, die in $Ax \leq b$, aber nicht in $A'x \leq b'$ sind, $a^t\tilde{x} < \beta$ gilt.

Es sei $\delta = c^t\tilde{x}$. Schließlich sei $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_m)$ eine Optimallösung des dualen LPs von (P).

Zeigen Sie, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, sodass für jeden Vektor $p = (p_1, \dots, p_m)$ mit $p_i \in [0, \epsilon]$ $(i = 1, \dots, m)$ das modifizierte lineare Programm (P')

$$\begin{array}{lrcl} \max c^t x & & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & b + p \\ & x & \geq & 0 \end{array}$$

ein Optimallösung mit Wert $\delta + \tilde{y}^t p$ hat. (4 Punkte)

Bemerkung: Wenn man mit den Ungleichungen in $Ax \leq b$ Beschränkungen von Ressourcen modelliert, dann kann man also durch Erhöhen der Ressource $i \in \{1, \dots, m\}$ um p_i den Ertrag um $y_i p_i$ erhöhen. Daher wären umgekehrt $y_i p_i$ die Kosten, die zu bezahlen man bereit sein sollte, um die Ressource i um p_i zu erhöhen (sogenannter Schattenpreis der Resource i)

b.w.

3. Es sei $H = (V, E)$ ein Hypergraph, also V eine endliche Menge von Knoten und $E \subseteq 2^V$. Außerdem seien $F \subseteq V$ und $x, y : F \to \mathbb{R}$ gegeben.

   (a) Beschreiben Sie das folgende Problem als lineares Programm. Gesucht ist eine Erweiterung $x, y : V \setminus F \to \mathbb{R}$, so dass

   $$\sum_{e \in E} \left(\max_{v \in e} x(v) - \min_{v \in e} x(v) + \max_{v \in e} y(v) - \min_{v \in e} y(v) \right)$$

   minimiert wird.

   (b) Dualisieren Sie das lineare Programm aus Teil (a) und zeigen Sie, dass das duale LP äquivalent zu einem Min-Cost-Flow-Problem ist (siehe unten). (2+3 Punkte)

   Hinweis: Bei einem Min-Cost-Flow-Problem sind ein gerichteter Graph G, Kantenkapazitäten $u : E(G) \to \mathbb{R}_{>0}$, Kantenkosten $c : E(G) \to \mathbb{R}$ und Werte $b : V(G) \to \mathbb{R}$ mit $\sum_{v \in V(G)} b(v) = 0$ gegeben. Gesucht ist eine Abbildung $f : E(G) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{e \in \delta_G^+(v)} f(e) - \sum_{e \in \delta_G^-(v)} f(e) = b(v)$, so dass $\sum_{e \in E} f(e) \cdot c(e)$ minimiert wird.

   Bemerkung: Dieses Problem ist eine Relaxierung des Platzierungsproblems im Chip-Design. Die Knoten entsprechen Bauteilen des Chips, und die Hyperkanten geben an, welche Gruppen von Bauteilen miteinander verbunden sind. Die Knoten in F sind vorplatzierte Elemente. Das Problem wird deutlich schwerer, wenn man zusätzlich einfordert, dass die Bauteile sich nicht überlappen dürfen.

Abgabe: Donnerstag, 28. Mai, 2020, vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).