Sommersemester 2020 | Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Dr. U. Brenner | Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
4. Übung

1. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}$ sei

$$M_X = \left\{ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}} \mid a_{i_0 j_0} \in X, \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} = 1, \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} = 1 \quad (\text{for } i_0, j_0 \in \{1,\dots,n\}) \right\}.$$

   Zeigen Sie, dass eine $n \times n$-Matrix A genau dann in $M_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ ist, wenn sie eine Konvexkombination von Matrizen in $M_{\{0,1\}}$ ist. (4 Punkte)
   Hinweis: Verwenden Sie Induktion und zeigen Sie die Aussage zunächst für die Ecken des Polyeders $M_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$.

2. Ein *innerer Punkt* eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor $x \in P$, der in keiner von P verschiedenen Fläche von P liegt (man beachte, dass sich diese Definition vom Begriff der inneren Punkten im topologischen Sinne unterscheidet). Beweisen oder widerlegen Sie: Jedes nicht-leere Polyeder enthält einen inneren Punkt. (3 Punkte)

3. Zwei Mengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ heißen *strikt separierbar*, wenn es eine Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a^t x = b\}$ mit $a \neq 0$ gibt, so dass $a^t x < b$ für alle $x \in X$ und $a^t y > b$ für alle $y \in Y$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Je zwei disjunkte abgeschlossene konvexe Mengen sind strikt separierbar. (2 Punkte)

4. Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $y \in \text{conv}(X)$. Zeigen Sie, dass es Vektoren $x_1, \dots, x_k \in X$ mit $k \leq n+1$ und $y \in \text{conv}(\{x_1, \dots, x_k\})$ gibt. (3 Punkte)

Abgabe: **Dienstag, 19. Mai, 2020**, vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).