Forschungsinstitut für Diskrete Mathematik
Universität Bonn

Lineare und Ganzzahlige Optimierung
3. Übung

1. Es sei $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ und $b \in \{0,1\}^m$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann einen Vektor $x \in \{0,1\}^n$ mit $Ax \equiv b \pmod 2$, wenn es kein $c \in \{0,1\}^m$ mit $c^t A \equiv 0 \pmod 2$ und $c^t b = 1 \pmod 2$ (wobei Modulo-Gleichungen von Vektoren natürlich komponentenweise zu verstehen sind). (4 Punkte)

2. Es sei P ein Polyeder mit $\dim(P) = d$ und F eine Fläche von P mit $\dim(F) = k \in \{0, \dots, d-1\}$. Zeigen Sie, dass es Flächen $F_{k+1}, F_{k+2}, \dots, F_{d-1}$ von P gibt mit

   i) $F \subseteq F_{k+1} \subseteq F_{k+2} \subseteq \cdots \subseteq F_{d-1} \subseteq P$,

   ii) $\dim(F_{k+i}) = k + i$ für $i \in \{1, \dots, d-k-1\}$. (4 Punkte)

3. Für zwei Vektormengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ihre Summe $X + Y$ definiert als.:

$$X + Y := \{z \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in X \, \exists y \in Y : z = x + y\}.$$

   Zeigen Sie, dass für zwei Polyeder $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ die Summe $X + Y$ ebenfalls ein Polyeder ist. (4 Punkte)

4. Es sei P ein Polyeder. Zeigen Sie, dass das Problem, eine größte Kugel zu finden, die in P hineinpasst, als lineares Programm geschrieben werden kann. (4 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 14. Mai, 2020, vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).