Lineare und Ganzzahlige Optimierung
2. Übung

1. Es seien $A_1, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen. Für jede Menge $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $|I| \leq n+1$ sei
$$\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$$
Zeigen Sie, dass dann gilt:
$$\bigcap_{i=1}^{m} A_i \neq \emptyset$$
(4 Punkte)
Hinweis: Verwenden Sie Induktion in m (beginnend mit $m = n+2$) und benutzen Sie Aufgabe 1 von Zettel 1.

2. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times (n+k)}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie, dass
$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R}^k : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq b\}$$
ein Polyeder ist. (3 Punkte)

3. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b, \tilde{b} \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie die folgenden linearen Programme:
(P1) $\max\{c^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$
(P2) $\max\{\mathbb{1}_n^t x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$
(P3) $\max\{c^t x \mid Ax \leq \tilde{b}, x \geq 0\}$
Welche der folgenden Aussagen sind dann notwendigerweise wahr? Beweisen Sie Ihre Antworten.
(a) Wenn (P1) unbeschränkt ist, dann ist (P2) unbeschränkt.
(b) Wenn (P2) unbeschränkt ist, dann ist (P1) unbeschränkt.
(c) Wenn (P1) unbeschränkt ist, dann ist (P3) unzulässig oder unbeschränkt. (2+2+2 Punkte)

4. Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Optimallösung der LPs $\max\{c^t x \mid Ax \leq b\}$. Außerdem sei $\tilde{b} = (\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_m) \in \mathbb{R}^m$, und es sei $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $A\tilde{x} \leq \tilde{b}$. Beweisen Sie, dass $\tilde{x}$ eine Optimallösung der LP $\max\{c^t x \mid Ax \leq \tilde{b}\}$ ist, falls für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ mit $a_i^t \tilde{x} < \tilde{b}_i$ auch $a_i^t x^* < b_i$ gilt (wober a_i^t die i-te Zeile von A sei). (3 Punkte)

Abgabe: Donnerstag, 7. Mai, 2020, vor der Vorlesung per E-Mail an den Tutor (die E-Mail-Adresse sollte bekannt sein, und kann sonst unter brenner(at)or.uni-bonn.de erfragt werden).